MATEMÁTICA

Geometria Euclidiana Plana

Teorema-Jalom (Harmonia P.P.)

E-mail: majalom@outlook.com

Data: 04 de Julho de 2014

Autor: Professor Maurício Ary Jalom

Bacharel e licenciado em Matemática, Física e Desenho pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Professor do Cefet-RJ Celso Suckow da Fonseca

Professor da Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá

Professor do Colégio Estadual Professor Fernando Antonio Raja Gabaglia

Professor do Curso Unipré (Preparatório para as Forças Armadas)

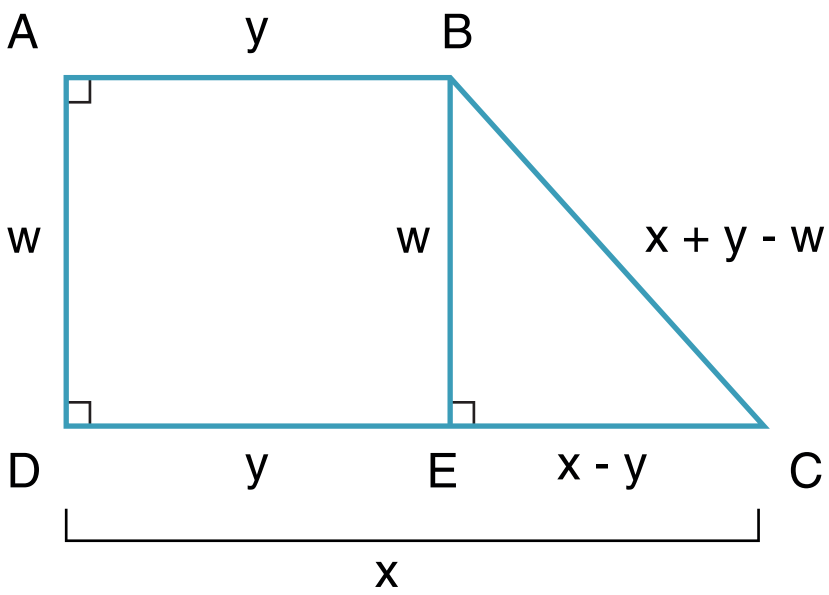
Professor do Projeto de Educação de Jovens e Adultos (Peja-2) no Ciep Samuel Wainer

Professor das escolas municipais Charles Dickens e Carneiro Felipe

Conteúdo

Enunciado

Em todo trapézio retângulo circunscritível, a altura é média harmônica entre as bases.



Demonstração

Sejam <u>x</u> e <u>y</u> as bases do trapézio; seja <u>w</u> a altura.
Se o trapézio é circunscritível, de acordo com o Teorema de Pitot, o lado não paralelo deverá medir <u>x + y - w</u> .
Apliquemos o Teorema de Pitágoras ao triângulo <u>BEC</u> e teremos:

$$(x + y - w)^2 = (x - y)^2 + w^2$$

$$x^2 + y^2 + w^2 + 2xy - 2xw - 2yw = x^2 - 2xy + y^2 + w^2$$

$$xy - xw - yw = - xy$$

$$w(x + y) = 2xy$$

Logo, teremos:

$$\boxed{w = 2xy : (x+y)}$$

C.H.O.Q.! Chegamos onde queríamos!

Aplicação do Teorema-Jalom (Harmonia P.P.)

A área de um trapézio retângulo circunscritível é igual ao produto das bases do mesmo. Vide demonstração a seguir:

Demonstração:
Considerando a figura anterior, podemos afirmar:

$$S = [(x+y) / 2] \cdot w$$

Mas, pelo Teorema-Jalom (Harmonia P.P.), vem:

$$S = [(x+y) / 2] \cdot [2xy / x+y]$$

Daí, teremos:

$$\boxed{S = xy}$$

$\downarrow$

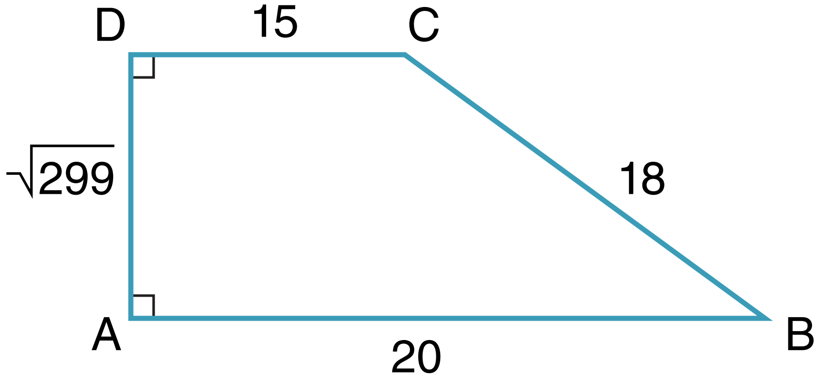
Área do trapézio

Medidas Coerentes

Autores de livros didáticos, examinadores e professores devem criar com atenção questões ou exercícios de Geometria com medidas coerentes, evitando, assim, críticas ou até anulação de questões formuladas.
Citarei, a seguir, alguns exemplos:

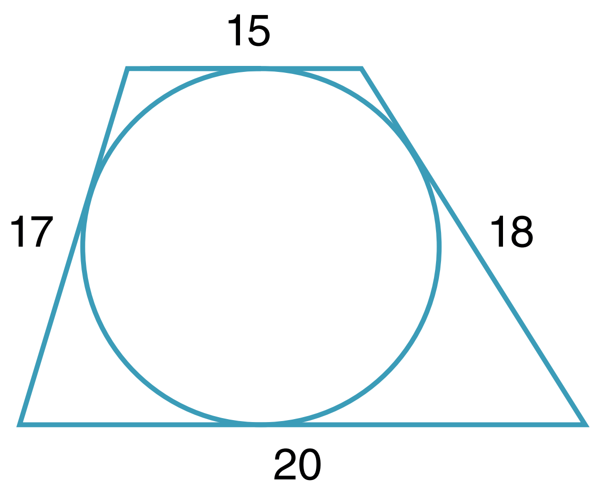
1º) Trapézio retângulo, mas não circunscritível.

<u>Pitágoras</u> satisfeito, mas <u>Pitot</u> não!



2º) Trapézio circunscritível, mas não é retângulo.

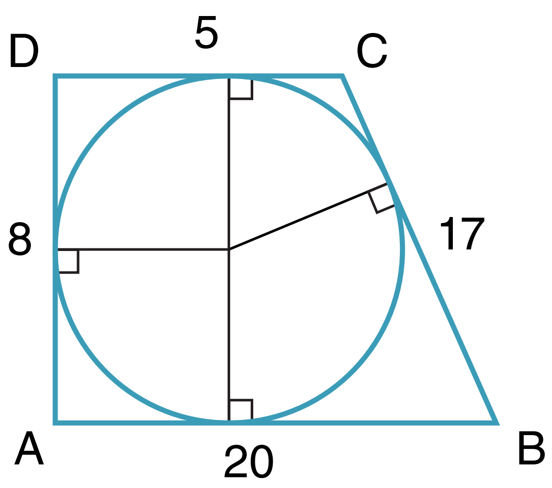
Pitot satisfeito, mas Pitágoras não!



3º) Trapézio retângulo e circunscritível.

Existe, agora, harmonia entre Pitágoras e Pitot!

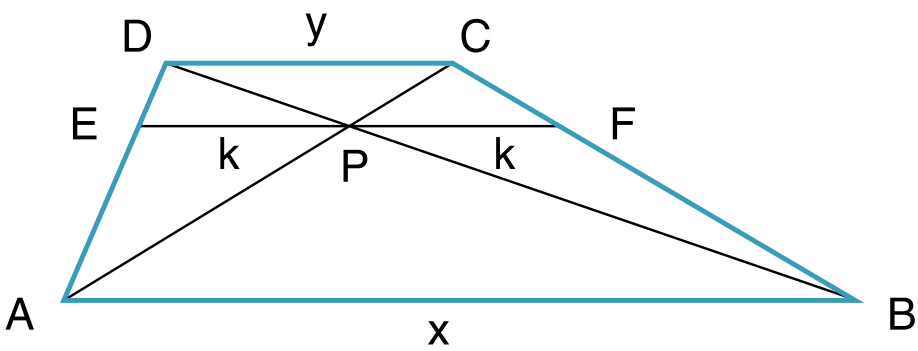
O Teorema-Jalom (Harmonia P.P.) mostra:



Observemos que a altura é média harmônica entre as bases!

$$\boxed{2 \cdot 5 \cdot 20 : (20+5) = 8}$$

Outras aplicações do Teorema-Jalom (Harmonia P.P.)



Sabemos que, dados dois segmentos de reta cujas medidas são x e y, achamos o segmento de reta cuja medida corresponde à média harmônica entre x e y, da seguinte maneira: construímos um trapézio de qualquer tipo ou altura, desde que suas bases sejam x e y, e traçamos suas diagonais AC e BD (vide figura anterior: trapézio ABCD).

Demonstração

Demonstra-se usando a proporcionalidade das medidas dos segmentos da figura, proporcionada pela semelhança de triângulos da mesma, como também pelo feixe de paralelas AB // EF // CD, que o segmento de reta EF tem por medida justamente a média harmônica entre x e y. Daí, podemos escrever:

$$\boxed{\overline{EF} = 2xy : (x+y)}$$

Outrossim, durante a demonstração conseguimos encontrar que:

$$\overline{EP} = \overline{PF} = k \rightarrow \text{daí, } \overline{EF} = 2k \rightarrow \boxed{k = xy : (x+y)}$$

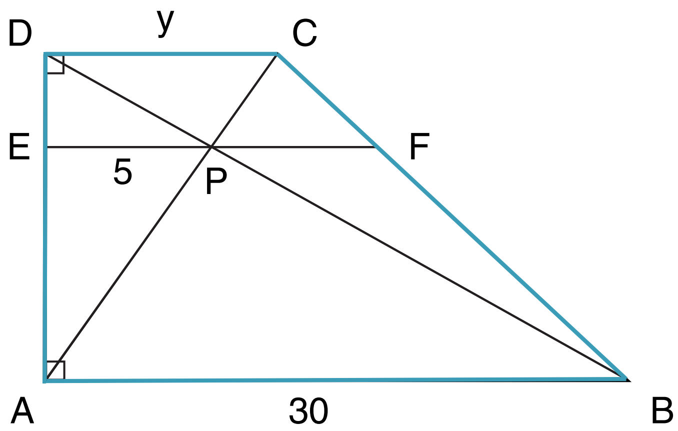
Observemos que P é o ponto de interseção das diagonais do trapézio cujas bases são x e y .
Considerando o que foi exposto acima, considerei de bom alvitre aplicar o Teorema-Jalom (Harmonia P.P.) num exercício no qual se emprega também a propriedade acima citada.

Dados:

$\overline{AB} = 30$ e $\overline{EP} = 5$

Pede-se:

S (área do trapézio)



Resolução

1º) Pelo exposto na demonstração da propriedade citada na página anterior, teremos:
$EF = 2 \cdot 5 = 10$ é a média harmônica entre as bases e sabemos, pelo Teorema-Jalom (Harmonia P.P.), que também é a altura do trapézio, pois trata-se de um trapézio retângulo.

2º) Visto isso, teremos:

$$10 = 2 \cdot 30 \cdot y / (30+y)$$
$$60y = 300 + 10y$$

daí,

$$\boxed{y = 6}$$

3º) Empregando, agora, a consequência do Teorema-Jalom (Harmonia P.P.), teremos, finalmente:

$$S = x \cdot y = 30 \cdot 6 = 180$$

Resposta: S = 180 (unidades de área).

Complementação

Sabe-se que, se tivermos dois segmentos de reta com medidas a cm e b cm, podemos achar graficamente um segmento de reta cuja medida seja a média harmônica entre as medidas a e b dos segmentos de reta considerados.
Para isso, construímos um trapézio cujas bases sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, cujas medidas sejam, respectivamente, a e b centímetros. A altura do trapézio é aleatória, isto é, a distância entre as bases do trapézio pode ser qualquer (as bases logicamente são paralelas).

A seguir, traçam-se as duas diagonais do trapézio, cujo ponto de interseção será um ponto P.

Obs.: O trapézio construído, conforme as posições relativas entre suas bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, poderá ser escaleno, isósceles ou retângulo.
A seguir, traçando um segmento $\overline{EF}$ paralelo às bases, passando pelo ponto P e compreendido entre os lados não paralelos, teremos encontrado o segmento procurado, isto é, cuja medida equivale à média harmônica entre as medidas a e b dos segmentos que representam as bases do trapézio considerado.

A demonstração desse teorema, que chamaremos teorema – I, está feita com detalhes num outro trabalho deste autor, intitulado *Detalhes da Média Harmônica*, que poderá ser visto ao pedi-lo pelo e-mail: majalom@outlook.com.

Vamos, neste trabalho, aplicar o Teorema-Jalom (Harmonia P.P.).
O Teorema-Jalom afirma: “Em todo trapézio retângulo circunscrito, a altura tem por medida a média harmônica entre as medidas de suas bases”. Esse teorema pode ser visto, com detalhes, nas seis primeiras páginas deste trabalho, inclusive com demonstrações e aplicações.

Vamos, agora, dar o motivo e objetivo desta complementação: considerando um trapézio retângulo e circunscritível, a obtenção da circunferência a ele atinente é o nosso objetivo. Para obter a circunferência, é preciso determinar o centro e o raio da mesma.

O centro é obtido do seguinte modo: considere o ponto médio do lado do trapézio que representa a altura do mesmo, e seja M esse ponto. Tracemos por M um segmento de reta paralelo às bases e de comprimento igual à metade da altura do trapézio. Então, essa medida será igual à metade da média harmônica entre as bases [considerando o Teorema-Jalom (Harmonia P.P.)].

Chamemos de $\overline{MO}$ a este segmento, que será o raio da circunferência inscrita no trapézio retângulo.

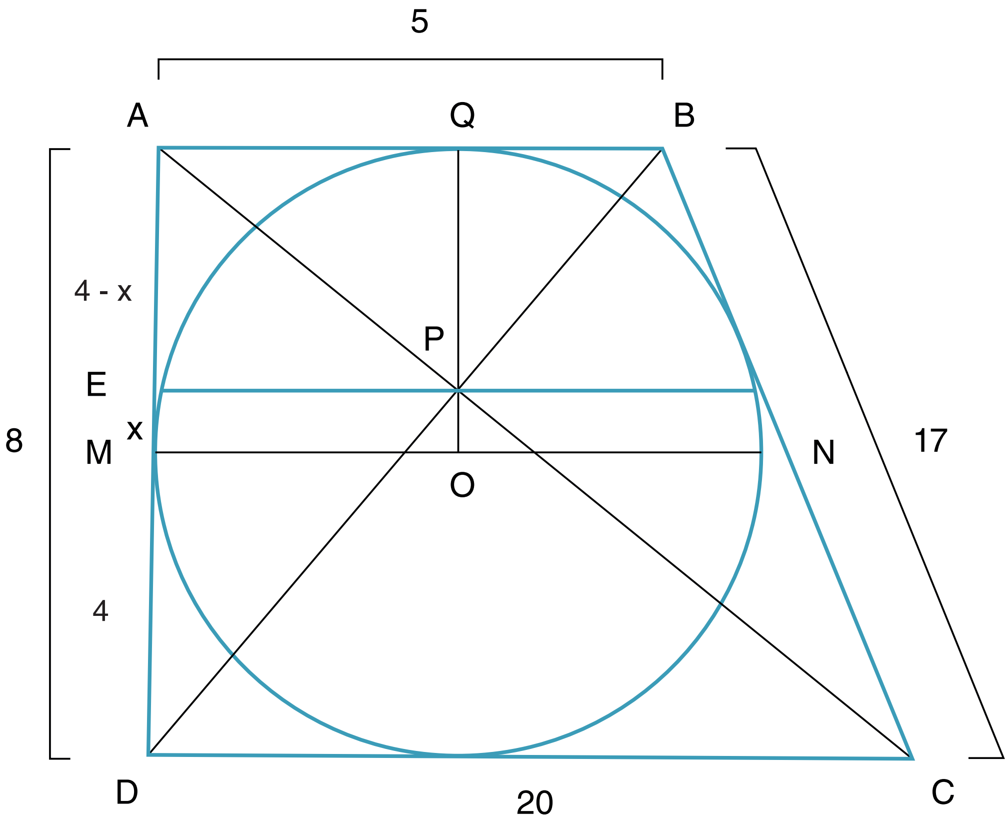
Podemos também traçar pelo ponto O um segmento perpendicular às bases, e esse segmento interceptará a base menor no ponto Q, mostrando $\overline{OQ}$ como raio da circunferência.

Note-se que o diâmetro da circunferência inscrita tem por medida a altura do trapézio, que por sua vez, como se sabe, tem a medida da média harmônica entre as medidas das bases.

Consideremos agora ponto P, interseção das duas diagonais traçadas no trapézio, e tiremos por P um segmento de reta de comprimento $\overline{EF}$, traçado paralelamente às bases e compreendido entre os lados não paralelos, que se demonstra medir a média harmônica entre as bases, então de comprimento igual à altura do trapézio.

Demonstra-se, também, que o ponto P é ponto médio de $\overline{EF}$.
Então, foi "achada" a circunferência e mostrou-se como encontrar graficamente um segmento que meça a média harmônica entre as bases do trapézio, cujo modo é geral para qualquer trapézio, isto é, basta tirar, pelo ponto de interseção das diagonais, um segmento paralelo às bases e compreendido entre os lados não paralelos do trapézio.

É lógico que falta traçar a figura. Então, lá vai:



Suponhamos, agora, um exemplo numérico: as bases $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, 20cm e 5cm.

Pelo Teorema-Jalom, a altura $\overline{AD}$, medindo 8cm, é a média harmônica entre 20 e 5, que são as bases do trapézio, senão vejamos:

$$2 \cdot 20 \cdot 5 : (20+5) = 200 : 25 = 8$$

Notemos que EMPO é um retângulo e $\overline{PO} \perp \overline{MO}$, e também MEFN é um retângulo, e chamemos $\overline{OP} = \overline{EM} = x$.

Notemos, também, que $\overline{DM} = \overline{MA} = 4$cm. E se $\overline{EM} = x$, temos que $\overline{AE} = 4 - x$. O nosso objetivo é calcular a medida de x, que é a distância entre o centro da circunferência e o ponto P, ponto de concorrência das diagonais do trapézio.

Observamos que o triângulo AEP é semelhante ao triângulo ADC, pois $\overline{EP}$ // $\overline{DC}$, então:

$\overline{AE} / \overline{AD} = \overline{EP} / \overline{CD}$ Daí vem,

$(4 - x) / 8 = 4 / 20$ Simplificando, teremos:

$(4 - x) / 2 = 4 / 5$ E aí vem:

$20 - 5x = 8$ e $5x = 12$, então $x = 12 / 5 = 2,4$ e podemos ter

$$\boxed{x = 2,4\text{cm}}$$

FIM